

Počty prvků – rovnice

Příklady

- ① Určete počet prvků n , z nichž lze utvořit [podmínky $V(k, n) \quad n \geq k, \quad n \in N, k \in N$]

a) 240 dvojčlenných variací

$$\begin{aligned} V(2, n) &= 240 & [n \geq 2 \wedge n \in N] \\ n(n-1) &= 240 & D = N - \{1\} \\ n_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 240}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{961}}{2} = \frac{1 \pm 31}{2} \\ n_1 &= 16 \in D & n_2 = -15 \notin D \end{aligned}$$

b) dvakrát více čtyřčlenných variací než tříčlenných

$$\begin{aligned} V(4, n) &= 2V(3, n) & [n \geq 4 \wedge n \geq 3 \wedge n \in N] \\ n(n-1)(n-2)(n-3) &= 2n(n-1)(n-2) & D = N - \{1, 2, 3\} \\ n-3 &= 2 \\ n &= 5 \in D \end{aligned}$$

- ② Určete původní počet prvků, jestliže víte, že zvětší-li se počet prvků o 2, zvětší se počet tříčlenných variací

a) desetkrát

$$\begin{aligned} V(3, n+2) &= 10V(3, n) & [n+2 \geq 3 \wedge n \geq 3 \wedge n \in N] \\ (n+2)(n+1)n &= 10n(n-1)(n-2) & D = N - \{1, 2\} \\ (n^2+3n+2)n &= 10n(n^2-3n+2) \\ n^3+3n^2+2n &= 10n^3-30n^2+20n \\ 0 &= 9n^3-33n^2+18n \\ 3n \cdot (3n^2-11n+6) &= 0 & [\text{lze i dělit } n, \text{ je různé od } 0] \\ n_1 &= 0 \notin D & n_{2,3} = \frac{11 \pm \sqrt{121-4 \cdot 3 \cdot 6}}{6} = \frac{11 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{11 \pm 7}{6} \\ n_2 &= 3 \in D & n_3 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \notin D \text{ nevyh.} \end{aligned}$$

b) o 150

$$\begin{aligned} V(3, n+2) &= V(3, n) + 150 & [n+2 \geq 3 \wedge n \geq 3 \wedge n \in N] \\ (n+2)(n+1)n &= n(n-1)(n-2) + 150 & D = N - \{1, 2\} \\ (n^2+3n+2)n &= n(n^2-3n+2) + 150 \\ n^3+3n^2+2n &= n^3-3n^2+2n+150 \\ 6n^2 &= 150 \\ n^2 &= 25 \\ |n| &= 5 \\ n_1 &= 5 \in D & n_2 = -5 \notin D \text{ nevyh.} \end{aligned}$$

- ③ Určete počet prvků tak, aby [podmínky $P(n) \quad n \in N$]

a) z nich bylo možno utvořit 40 320 permutací

$$\begin{aligned} P(n) &= 40320 & 40320 &= 1 \cdot 2 \cdot 20160 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6720 = \\ n! &= 40320 & &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1680 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 336 = \\ n &= 8 & &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 56 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 8! \end{aligned}$$

b) při zvětšení jejich počtu o 2 se počet permutací zvětšil 56krát

$$\begin{aligned} P(n+2) &= 56 \cdot P(n) & [n > 0 \wedge n+2 > 0 \wedge n \in \mathbb{N}] \\ (n+2)! &= 56 \cdot n! & D = \mathbb{N} \\ (n+2) \cdot (n+1) \cdot n! &= 56 \cdot n! \\ n^2 + 3n + 2 &= 56 \\ n^2 + 3n - 54 &= 0 \\ (n+9)(n-6) &= 0 \\ n_1 &= -9 \notin D \text{ nevyh.} & n_2 = 6 \in D \end{aligned}$$

c) při zmenšení jejich počtu o 2 se počet permutací zmenšil 20krát

$$\begin{aligned} 20 \cdot P(n-2) &= P(n) & \left[\begin{array}{l} n-2 > 0 \\ n > 2 \end{array} \wedge n > 0 \wedge n \in \mathbb{N} \right] \\ 20 \cdot (n-2)! &= n! & D = \mathbb{N} - \{1, 2, 3\} \\ 20 \cdot (n-2)! &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2)! \\ 20 &= n^2 - n & \text{lze i} \quad 20 = n \cdot (n-1) \\ n^2 - n - 20 &= 0 & \text{zkusmo: } 20 = 5 \cdot (5-1) \\ (n-5)(n+4) &= 0 & n = 5 \\ n_1 &= 5 \in D & n_2 = -4 \notin D \text{ nevyh.} \end{aligned}$$

④ Určete počet prvků tak, aby [podmínky $K(k, n) \quad n \geq k \quad n, k \in \mathbb{N}_0$]

a) při zvětšení počtu prvků o jeden se počet tříčlenných kombinací zvětšil o 21

$$\begin{aligned} K(3, n) &= K(3, n+1) - 21 & [n+1 \geq 3 \quad n \geq 3 \wedge n \in \mathbb{N}_0] \\ \binom{n}{3} &= \binom{n+1}{3} - 21 & n \geq 2 \\ \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} &= \frac{(n+1)n(n-1)}{3 \cdot 2 \cdot 1} - 21 & D = \mathbb{N} - \{1, 2\} \\ n(n^2 - 3n + 2) &= (n^2 - 1)n - 126 \\ n^3 - 3n^2 + 2n &= n^3 - n - 126 \\ 0 &= 3n^2 - 3n - 126 \\ 0 &= n^2 - n - 42 \\ 0 &= (n-7)(n+6) \\ n_1 &= 7 \in D & n_2 = -6 \notin D \text{ nevyh.} \end{aligned}$$

b) počet čtyřčlenných kombinací z nich vytvořených byl dvacetkrát větší než počet dvoučlenných kombinací

$$\begin{aligned} K(4, n) &= 20 \cdot K(2, n) & [n \geq 4 \quad n \geq 2 \quad n \in \mathbb{N}_0] \\ \binom{n}{4} &= 20 \binom{n}{2} & D = \mathbb{N} - \{1, 2, 3\} \\ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} &= 20 \cdot \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} & / \cdot 24 \\ n^2 - 5n + 6 &= 240 \\ n^2 - 5n - 234 &= 0 \\ n_{1,2} &= \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 234}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{961}}{2} = \frac{5 \pm 31}{2} \\ n_1 &= 18 \in D & n_2 = -13 \notin D \text{ nevyh.} \end{aligned}$$